유형 1 수학적 귀납법

1.

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.
(가)~(라)에 알맞은 수 또는 식을 차례로 써넣어라.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)= (가) , (우변)= (나)
이므로 ㉠이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 (다) 를(을) 더하면

$$1+2+3+\cdots+k+\boxed{\text{(다)}}$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+\boxed{\text{(다)}}=\boxed{\text{(라)}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

2.

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.
(가),(나),(다)에 알맞은 수 또는 식을 차례로 써넣어라.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)= 1, (우변)=1이므로 ㉠이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \quad \cdots ㉡$$

㉡의 양변에 (가) 를(을) 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{\text{(가)}}$$

$$=k^2+\boxed{\text{(가)}}=\boxed{\text{(나)}}$$

따라서 $n=$ (다) 일 때도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

3.

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)= (가) , (우변)= (가)
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 (나) 를(을) 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\boxed{\text{(나)}}=\boxed{\text{(다)}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 수 또는 식을 차례로 써넣어라.

4.

다음은 $h>0$일 때, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$(1+h)^n>1+nh$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=2$일 때,
(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h=$ (우변)
이므로 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k>1+kh \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 (가) 를(을) 더하면

$$(1+h)^{\boxed{\text{(나)}}}>(1+kh)(\boxed{\text{(가)}})>1+(k+1)h$$

$$(\because kh^2>0)$$

$$\therefore\ (1+h)^{\boxed{\text{(나)}}}>1+(k+1)h$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(가)에 들어갈 식을 $f(h)$, (나)에 들어갈 식을 $g(k)$라 할 때, $f(4)+g(5)$의 값을 구하여라.

유형 2 일반적인 귀납적 정의 풀이

5.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 값을 구하여라.

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}={a_n}^2-n^2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

6. 귀납적으로 정의된 다음 수열의 첫째항부터 제5항까지 나열하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n$

(3) $a_1=2,\ a_{n+1}+a_n=3$

(4) $a_1=2,\ a_na_{n+1}=5$

7.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 4항을 구하여라.

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+1$

(2) $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$

8.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 4항을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n$

(2) $a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}+2$

9.

귀납적 정의된 다음 수열의 첫째항부터 제5항까지의 항을 차례로 구하여라.

(1) $\begin{cases}a_1=3\\ a_{n+1}=3a_n\ (n=1,2,3,\ \cdots)\end{cases}$

(2) $\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=2a_n+n\ (n=1,2,3,\ \cdots)\end{cases}$

유형 3 등차·등비수열의 귀납적 정의

10.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$

(2) $a_1=2,\ a_2=6,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$

11.

다음 수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하여라.

(1) $-9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11,\ \cdots$

(2) $5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ \cdots$

(3) $20,\ 17,\ 14,\ 11,\ 8,\ \cdots$

12.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$

(2) $a_1=2,\ a_2=6,\ {a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$

13.

다음 수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하여라.

(1) $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$

(2) $10,\ 6,\ 2,\ -2,\ -6,\ \cdots$

(3) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

(4) $9,\ -3,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$

유형 4 $a_{n+1}=f(n)+a_n$

14.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

15.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4n$

(2) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=2n+1$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=2^n$

16.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n$

(2) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=2n-1$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=3^n$

17.

귀납적으로 정의된 다음 수열에서 a_{10}의 값을 구하여라.

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+n$

(2) $a_1=-2,\ a_{n+1}=a_n-3n$

유형 5 $a_{n+1}=f(n)\times a_n$

18.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$

19.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=2^n a_n$

20.

귀납적으로 정의된 수열 $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$에서 a_{10}의 값을 구하여라.

유형 6 $a_{n+1}=pa_n+q$ 및 여러 가지 귀납적 정의

21.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n의 값을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

22.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+2$

(2) $a_1=1,\ a_2=2,\ 2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$

23.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-1$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$

(3) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+4a_n=0$

(4) $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$

(5) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{3+2a_n}$

24.

귀납적으로 정의된 다음 수열에서 a_6의 값을 구하여라.

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_1a_2\cdots a_n=\frac{1}{n+1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

25.

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$로 정의될 때, a_{20}의 값을 구하여라.

26.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$$

정답 및 풀이

문제 [1]

정답 (가) 1 (나) 1 (다) $k+1$ (라) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

문제해설

(i) $n=1$일 때, (좌변)=$\boxed{1}$, (우변)=$\frac{1\cdot 2}{2}=\boxed{1}$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ …㉡

㉡의 양변에 $\boxed{k+1}$을 더하면

$1+2+3+\cdots+k+\boxed{k+1}=\frac{k(k+1)}{2}+\boxed{k+1}$

$=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

문제 [2]

정답 (가) $2k+1$ (나) $(k+1)^2$ (다) $k+1$

문제해설

(i) $n=1$일 때, (좌변)=$2\cdot 1-1=1$, (우변)=$1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ …㉡

㉡의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}=k^2+\boxed{2k+1}=\boxed{(k+1)^2}$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

문제 [3]

정답 (가) $\frac{1}{2}$ (나) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (다) $\frac{k+1}{k+2}$

문제해설

(i) $n=1$일 때, (좌변)=$\frac{1}{1\cdot 2}=\boxed{\frac{1}{2}}$, (우변)=$\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ …㉠

㉠의 양변에 $\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$

$=\frac{k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$

$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\boxed{\frac{k+1}{k+2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

문제 [4]

정답 11

문제해설

(i) $n=2$일 때,

(좌변)=$(1+h)^2-1+2h+h^2>1+2h=$(우변)이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ …㉠

㉠의 양변에 $\boxed{1+h}$를 더하면

$(1+h)^{\boxed{k+1}}>(1+kh)(\boxed{1+h})$

$=1+(k+1)h+kh^2$

$>1+(k+1)h$ ($\because kh^2>0$)

$\therefore\ (1+h)^{\boxed{k+1}}>1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

따라서 $f(h)=1+h$, $g(k)=k+1$이므로 $f(4)+f(5)=11$

문제 [5]

정답 (1) 16 (2) $\frac{139}{33}$

문제해설

(1) $a_2=a_1{}^2-1^2=2^2-1=3$

$a_3=a_2{}^2-2^2=3^2-4=5$

$a_4=a_3{}^2-3^2=5^2-9=16$

(2) $a_2=a_1+\frac{2}{a_1}=1+\frac{2}{1}=3$

$a_3=a_2+\frac{2}{a_2}=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$

$a_4=a_3+\frac{2}{a_3}=\frac{11}{3}+\frac{2}{\frac{11}{3}}=\frac{11}{3}+\frac{6}{11}=\frac{139}{33}$

문제 [6]

정답

(1) 1, 3, 5, 7, 9 (2) 1, 2, 4, 7, 11

(3) 2, 1, 2, 1, 2 (4) 2, $\frac{5}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 2

문제해설

(1) $a_1=1$, $a_2=a_1+2=3$, $a_3=a_2+2=5$,

$a_4=a_3+2=7$, $a_5=a_4+2=9$

(2) $a_1=1$, $a_2=a_1+1=2$, $a_3=a_2+2=4$,

$a_4=a_3+3=7$, $a_5=a_4+4=11$

(3) $a_{n+1}+a_n=3$에서 $a_{n+1}=-a_n+3$이므로

$a_1=2$, $a_2=-a_1+3=1$, $a_3=-a_2+3=2$,

$a_4=-a_3+3=1$, $a_5=-a_4+3=2$

(4) $a_na_{n+1}=5$에서 $a_{n+1}=\frac{5}{a_n}$이므로

$a_1=2$, $a_2=\frac{5}{a_1}=\frac{5}{2}$, $a_3=\frac{5}{a_2}=2$, $a_4=\frac{5}{a_3}=\frac{5}{2}$, $a_5=\frac{5}{a_4}=5$

문제 [7]

정답 (1) 31 (2) 3

문제해설

(1) $n=1$일 때, $a_2=2a_1+1=2\cdot 3+1=7$ ← $a_1=3$
$n=2$일 때, $a_3=2a_2+1=2\cdot 7+1=15$ ← $a_2=7$
$n=3$일 때, $a_4=2a_3+1=2\cdot 15+1=31$ ← $a_3=15$

(2) $n=1$일 때, $a_3=a_1+a_2=1+1=2$ ← $a_1=1,\ a_2=1$
$n=2$일 때, $a_4=a_2+a_3=1+2=3$ ← $a_2=1,\ a_3=2$

문제 [8]

정답 (1) 19 (2) 17 (3) $\frac{17}{7}$

문제해설

(1) $a_{n+1}=2a_n+n$에서 $a_2=2a_1+1=2\cdot 1+1=3$
$a_3=2a_2+2=2\cdot 3+2=8$, $a_4=2a_3+3=2\cdot 8+3=19$

(2) $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$에서 $a_3=2a_2+a_1=2\cdot 3+1=7$
$a_4=2a_3+a_2=2\cdot 7+3=17$

(3) $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+2$에서 $a_2=\frac{1}{a_1}+2=1+2=3$
$a_3=\frac{1}{a_2}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$, $a_4=\frac{1}{a_3}+2=\frac{3}{7}+2=\frac{17}{7}$

문제 [9]

정답 (1) 3, 9, 27, 81, 243 (2) 1, 3, 8, 19, 42

문제해설

(1) $a_1=3$
$a_2=3a_1=3\cdot 3=9$, $a_3=3a_2=3\cdot 9=27$
$a_4=3a_3=3\cdot 27=81$, $a_5=3a_4=3\cdot 81=243$

(2) $a_1=1$
$a_2=2a_1+1=2\cdot 1+1=3$, $a_3=2a_2+2=2\cdot 3+2=8$
$a_4=2a_3+3=2\cdot 8+3=19$, $a_5=2a_4+4=2\cdot 19+4=42$

문제 [10]

정답 (1) $a_n=5n-4$ (2) $a_n=4n-2$

문제해설

(1) $a_{n+1}=a_n+5$에서 $a_{n+1}-a_n=5$
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 5인 등차수열이므로
$a_n=1+(n-1)\cdot 5=5n-4$

(2) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등차중항이므로
수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
이때, 공차를 d라 하면 $d=a_2-a_1=6-2=4$
이고, 첫째항이 2이므로 일반항 a_n은
$a_n=2+(n-1)\cdot 4=4n-2$

문제 [11]

정답
(1) $a_1=-9,\ a_{n+1}=a_n+5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
(2) $a_1=5,\ a_{n+1}=a_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
(3) $a_1=20,\ a_{n+1}=a_n-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

문제해설

(1) 첫째항 a_1은 $a_1=-9$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 보면
$a_2-a_1=-4-(-9)=5$
$a_3-a_2=1-(-4)=5$
$a_4-a_3=6-1=5$
⋮
$a_{n+1}-a_n=5\ (n\geq 1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=-9,\ a_{n+1}=a_n+5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) 첫째항 a_1은 $a_1=5$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 보면
$a_2-a_1=3-5=-2$
$a_3-a_2=1-3=-2$
$a_4-a_3=-1-1=-2$
⋮
$a_{n+1}-a_n=5\ (n\geq 1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=5,\ a_{n+1}=a_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) 첫째항 a_1은 $a_1=20$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 보면
$a_2-a_1=17-20=-3$
$a_3-a_2=14-17=-3$
$a_4-a_3=11-14=-3$
⋮
$a_{n+1}-a_n=-3\ (n\geq 1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=20,\ a_{n+1}=a_n-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

문제 [12]

정답
(1) $a_1=1,\ a_n=2^{n-1}\ (n\geq 2)$
(2) $a_1=2,\ a_n=2\cdot 3^{n-1}\ (n\geq 2)$

문제해설

(1) $a_{n+1}=2a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_1=1,\ a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}\ (n\geq 2)$

(2) ${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$에서 a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등비중항이므로
수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
이때, 공비를 r라 하면 $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3$
이고, 첫째항이 2이므로 일반항 a_n은
$a_1=2,\ a_n=2\cdot 3^{n-1}\ (n\geq 2)$

문제 [13]

정답
(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
(2) $a_1=10,\ a_{n+1}=a_n-4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
(4) $a_1=9,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

문제해설

(1) 첫째항 $a_1=2$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2-a_1=5-2=3$
$a_3-a_2=8-5=3$
$a_4-a_3=11-8=3$
⋮

$a_{n+1}-a_n=3\ (n\geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3\ (n=1,2,3,\cdots)$

(2) 첫째항 $a_1=10$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=6-10=-4$

$a_3-a_2=2-6=-4$

$a_4-a_3=-2-2=-4$

$\vdots$

$a_{n+1}-a_n=-4\ (n\geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=10,\ a_{n+1}=a_n-4\ (n=1,2,3,\cdots)$

(3) 첫째항 $a_1=1$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2\div a_1=2\div 1=2$

$a_3\div a_2=4\div 2=2$

$\vdots$

$a_{n+1}\div a_n=2\ (n\geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$

(4) 첫째항 $a_1=9$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2\div a_1=(-3)\div 9=-\frac{1}{3}$

$a_3\div a_2=1\div(-3)=-\frac{1}{3}$

$a_4\div a_3=(-\frac{1}{3})\div 1=-\frac{1}{3}$

$\vdots$

$a_{n+1}\div a_n=-\frac{1}{3}\ (n\geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=9,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$

문제 [14]

정답 **(1)** $a_n=\frac{3n^2-3n+2}{2}$ **(2)** $a_n=2n^2-3n+2$

문제해설

(1) $a_{n+1}=a_n+3n$**의 양변에** n**대신에** $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$**을 차례로 대입하여 변끼리 더하면**

$\cancel{a_2}=a_1+3\cdot 1$

$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+3\cdot 2$

$\vdots$

$+)\ a_n=\cancel{a_{n-1}}+3(n-1)$

$a_n=a_1+3\{1+2+3+\ \cdots\ +(n-1)\}$

$=1+3\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=1+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{3n^2-3n+2}{2}\ (n\geq 2)$ ····· ㉠

또, $a_1=1$**은 ㉠에** $n=1$**을 대입하여 얻은 값과 같으므로 주어진 수열의 일반항은** $a_n=\frac{3n^2-3n+2}{2}$

(2) $a_{n+1}=a_n+4n-1$**의 양변에** n**대신에** $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$**을 차례로 대입하여 변끼리 더하면**

$\cancel{a_2}=a_1+4\cdot 1-1$

$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+4\cdot 2-1$

$\vdots$

$+)\ a_n=\cancel{a_{n-1}}+4(n-1)-1$

$a_n=a_1+4\{1+2+3+\ \cdots\ +(n-1)\}-(n-1)$

$=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k-(n-1)$

$=1+4\cdot\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$

$=2n^2-3n+2\ (n\geq 2)$ ····· ㉡

또, $a_1=1$**은 ㉡에** $n=1$**을 대입하여 얻은 값과 같으므로 주어진 수열의 일반항은** $a_n=2n^2-3n+2$

문제 [15]

정답

(1) $a_n=2n^2-2n+1$ **(2)** $a_n=n^2+2$

(3) $a_n=2^n-1$

문제해설

(1) $a_{n+1}=a_n+4n$**의** n**에** $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$**을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면**

$a_2=a_1+4\cdot 1$

$a_3=a_2+4\cdot 2$

$\vdots$

$+\ )\ a_n=a_{n-1}+4(n-1)$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k=1+4\cdot\frac{(n-1)n}{2}=2n^2-2n+1$

(2) $a_{n+1}-a_n=2n+1$**의** n**에** $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$**을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면**

$a_2-a_1=2\cdot 1+1$

$a_3-a_2=2\cdot 2+1$

$\vdots$

$+\ )\ a_n-a_{n-1}=2\cdot(n-1)+1$

$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=3+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)\ =n^2+2$

(3) $a_{n+1}-a_n=2^n$**의** n**에** $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$**을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면**

$a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=2^2$

$\vdots$

$+\ )\ a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$

$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+2\cdot\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=1+2^n-2=2^{n-1}$

문제 [16]

정답 (1) $a_n=\frac{n^2-n+2}{2}$ (2) $a_n=n^2-2n+4$ (3) $a_n=\frac{3^n-1}{2}$

문제해설

(1) $a_{n+1}=a_n+n$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+1$$
$$a_3=a_2+2$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n=a_{n-1}+(n-1)$$
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$$

(2) $a_{n+1}-a_n=2n-1$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2-a_1=2\cdot1-1$$
$$a_3-a_2=2\cdot2-1$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n-a_{n-1}=2(n-1)-1$$
$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$\therefore a_n=3+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$
$$=n^2-2n+4$$

(3) $a_{n+1}-a_n=3^n$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2-a_1=3$$
$$a_3-a_2=3^2$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n-a_{n-1}=3^{n-1}$$
$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}3^k=\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{3^n-3}{2}$$
$$a_n=1+\frac{3^n-3}{2}=\frac{3^n-1}{2}$$

문제 [17]

정답 (1) 48 (2) -137

문제해설

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+n$ …… ①

①의 n에 $1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+1$$
$$a_3=a_2+2$$
$$a_4=a_3+3$$
$$\vdots$$
$$a_9=a_8+8$$
$$a_{10}=a_9+9$$

이제 위 9개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_9+a_{10}$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9)+(1+2+\cdots+8+9)$

이므로 $a_{10}=a_1+(1+2+3+\cdots+8+9)$

$=3+\frac{9(1+9)}{2}=48$

(2) $a_1=-2,\ a_{n+1}=a_n-3n$ …… ①

①의 n에 $1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1-3$$
$$a_3=a_2-6$$
$$a_4=a_3-9$$
$$\vdots$$
$$a_9=a_8-24$$
$$a_{10}=a_9-27$$

이제 위 9개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_9+a_{10}$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9)-(3+6+\cdots+18+27)$

이므로

$$a_{10}=a_1-(3+6+9+\cdots+18+27)=-2-\frac{9(3+27)}{2}=-137$$

문제 [18]

정답 (1) $a_n=n$ (2) $a_n=\frac{2}{n+1}$

문제해설

(1) $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 양변에 n대신에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=2a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{3}{2}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{4}{3}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{n}{n-1}\cancel{a_{n-1}}$$
$$a_n=\left(2\cdot\frac{\cancel3}{\cancel2}\cdot\frac{\cancel4}{\cancel3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{\cancel{n-1}}\right)a_1$$
$$=n\ (n\ge2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 주어진 수열의 일반항은 $a_n=n$

(2) $a_{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+2}\right)a_n=\frac{n+1}{n+2}a_n$

$a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}a_n$의 양변에 n대신에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{2}{3}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{3}{4}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{4}{5}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{n}{n+1}\cancel{a_{n-1}}$$
$$a_n=\left(\frac{2}{\cancel3}\cdot\frac{\cancel3}{\cancel4}\cdot\frac{\cancel4}{\cancel5}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel n}{n+1}\right)a_1$$
$$=\frac{2}{n+1}\ (n\ge2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 주어진 수열의 일반항은 $a_n=\frac{2}{n+1}$

문제 [19]

정답 (1) $a_n=\dfrac{4}{n}$ (2) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

문제해설

(1) $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1$$
$$a_3=\frac{2}{3}a_2$$
$$a_4=\frac{3}{4}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}$$
$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}a_1$$
$$=\frac{1}{n}\cdot 4=\frac{4}{n}$$

(2) $a_{n+1}=2a_n$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=2a_1$$
$$a_3=2^2a_2$$
$$a_4=2^3a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=2^{n-1}a_{n-1}$$
$$a_n=2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^{n-1}a_1$$
$$=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\cdot 1$$
$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

문제 [20]

정답 10

문제해설

$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$ …… ①

①의 n에 $1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례대로 대입하면

$$a_2=2a_1$$
$$a_3=\frac{3}{2}a_2$$
$$a_4=\frac{4}{3}a_3$$
$$\vdots$$
$$a_9=\frac{9}{8}a_8$$
$$a_{10}=\frac{10}{9}a_9$$

이제 위 9개의 등식을 변끼리 곱하여 정리하면

$a_2a_3a_4\cdots a_9a_{10}$

$=2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{10}{9}a_1a_2a_3\cdots a_8a_9$

이므로 $a_{10}=10a_1=10$

문제 [21]

정답 (1) $a_n=2^n-1$ (2) $a_1=1,\ a_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3\ (n\geq 2)$

문제해설

(1) $a_{n+1}=2a_n+1$에서 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=2a_n-\alpha\quad\therefore\ \alpha=-1$

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$이므로 $a_n+1=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=2b_n$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1+1=1+1=2$, 공비가 2인 등비수열이므로 $b_1=2,\ b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n\ (n\geq 2)$

따라서 $a_n+1=b_n$, 즉 $a_n=b_n-1$이므로

$a_1=1,\ a_n=2^n-1\ (n\geq 2)$

또, $a_n=2^n-1$에 $n=1$을 대입하면 $a_1=1$이므로 주어진 수열의 일반항은 $a_n=2^n-1$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$에서 $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}\alpha,\quad\dfrac{2}{3}\alpha=2$에서 $\alpha=3$

$a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$이므로 $a_n-3=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1-3=1-3=-2$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로 $b_1=-2,\ b_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\ (n\geq 2)$

따라서 $a_n-3=b_n$, 즉 $a_n=b_n+3$이므로

$a_1=1,\ a_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3\ (n\geq 2)$

문제 [22]

정답 (1) $a_n=3^n-1$ (2) $a_n=3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ (3) $a_n=\dfrac{1}{3n-2}$

문제해설

(1) $a_{n+1}=3a_n+2$에서 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

따라서 수열 $\{a_n+1\}$은 첫째항이 $a_1+1=2+1=3$, 공비가 3인 등비수열이므로 $a_{n+1}=3^n\quad\therefore\ a_n=3^n-1$

(2) $2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=2-1=1$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 $a_{n+1}-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

위의 식의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2-a_1=1$$
$$a_3-a_2=\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n-a_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=1+\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

(3) $a_n=\frac{1}{3n-2}$에서 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+3$

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=b_n+3$, $b_1=\frac{1}{a_1}=1$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$b_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$ $\therefore a_n=\frac{1}{3n-2}$

문제 [23]

정답

(1) $a_n=2^{n-1}+1$ (2) $a_n=3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3) $a_n=\frac{4^{n-1}+2}{3}$ (4) $a_n=\frac{3}{3n-2}$

(5) $a_n=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$

문제해설

(1) $a_{n+1}=2a_n-1$에서 $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=2b_n$, $b_1=a_1-1=1$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이1, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ $\therefore a_n=b_n+1=2^{n-1}+1$

(2) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$에서 $a_{n+1}-3=\frac{2}{3}(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n$, $b_1=a_1-3=-1$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$b_n=(-1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $\therefore a_n=b_n+3=3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3) $a_{n+2}-5a_{n+1}+4a_n=0$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=4b_n$, $b_1=a_2-a_1=1$

따라서 수열$\{b_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 4인 등비수열이므로

$b_n=1\cdot 4^{n-1}=4^{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=4^{n-1}$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2-a_1=1$

$a_3-a_2=4$

⋮

$+)\ a_n-a_{n-1}=4^{n-2}$

$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}4^{k-1}=\frac{1\cdot(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^{n-1}-1}{3}$

$\therefore a_n=1+\frac{4^{n-1}-1}{3}=\frac{4^{n-1}+2}{3}$

(4) $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$에서 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+1$

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=b_n+1$, $b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}$

따라서 수열$\{b_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고, 공비가 1인 등차수열이므로 $b_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot 1=n-\frac{2}{3}=\frac{3n-2}{3}$

$\therefore a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{3}{3n-2}$

(5) $a_{n+1}=\frac{a_n}{3+2a_n}$에서 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3+2a_n}{a_n}=\frac{3}{a_n}+2$

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 $b_n=3b_n+2$

$\therefore b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

따라서 수열 $\{b_n+1\}$은 공비가 3인 등비수열이고 첫째항은

$b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=1+1=2$이므로 $b_n+1=2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$ $\therefore a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$

문제 [24]

정답 $\frac{6}{7}$

문제해설

$a_1=\frac{1}{2}$, $a_1a_2=\frac{1}{3}$이므로 $a_2=\frac{2}{3}$

$a_1a_2a_3=\frac{1}{4}$이므로 $a_3=\frac{3}{4}$, $a_1a_2a_3a_4=\frac{1}{5}$이므로 $a_4=\frac{4}{5}$,

$a_1a_2a_3a_4a_5=\frac{1}{6}$이므로 $a_5=\frac{5}{6}$, $a_1a_2a_3a_4a_5a_6=\frac{1}{7}$이므로 $a_6=\frac{6}{7}$

문제 [25]

정답 $\frac{3^{20}+1}{2}$

문제해설

$a_{n+1}=3a_n-1$에서 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이고 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$

$\therefore a_n=\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3^n+1}{2}$ $\therefore a_{20}=\frac{3^{20}+1}{2}$

문제 [26]

정답 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\ (n\ge 2)$

문제해설

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$에서 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\alpha$

$\frac{1}{2}\alpha=1$에서 $\alpha=2$

$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$이므로 $a_n-2=b_n$이라 하면

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1-2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$b_1=-\frac{3}{2}$, $b_n=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n\ge 2)$

따라서 $a_n-2=b_n$, 즉 $a_n=b_n+2$이므로

$a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\ (n\ge 2)$